



TITLE:

# 内部運動のある自己重力流体の力学平衡形状(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

蜂巢, 泉; 江里口, 良治

---

CITATION:

蜂巢, 泉 ...[et al]. 内部運動のある自己重力流体の力学平衡形状(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 539: 313-326

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98716>

RIGHT:

## 内部運動のある自己重力流体の力学平衡形状

京都大学・工学部      蜂巢 泉      (Izumi Hachisu)  
マックス・プランク研   江里口 良治   (Yoshiharu Eriguchi)

### § 1. はじめに

昨年度の同研究会では、剛体的に回転する自己重力流体の力学平衡形状について報告した。今回、内部運動がある場合についても新たに調べたので報告する。

非圧縮性自己重力流体が、回転又は角運動量の増加とともにどのようにその形を変えていくか、という問題は天体物理において連星系や惑星・衛星系の生成と関連して古くから論じられてきた。まず、マクローリン(Maclaurin)が剛体回転する自己重力流体の厳密解を見つけた。これは、マクローリン回転楕円体と呼ばれる。その形は軸対称で、子午面での切口は楕円である。この解は、角運動量が増加するにつれて次第に扁平になっていく。それにつれて、角速度は最初は増加するが、あるところで最大値になり、以後は単調に減少していく。この様子を表したのが、図1である。(この図は、昨年度の研究会で発表したものからとった。)ここで、 $j$  および  $\omega$  はつぎのようにして定義したものである。

$$\omega^2 = \Omega^2 / (4\pi G \rho) \quad (1)$$

$$j^2 = J^2 / (4\pi G M^{\frac{10}{3}} \rho^{-\frac{1}{3}}) \quad (2)$$

ここで、 $\Omega$  は角速度、 $J$  は角運動量、 $\rho$  は密度、 $G$  は重力定数である。

軸対称からずれた解は、19世紀になってからヤコビ(Jacobi)が見つけた。ヤコビ楕円体、またはヤコビ三軸不等楕円体と呼ばれる。この解は、角運動量がある量より大きい場合のみ存在し、最小の角運動量の解は、マクローリン回転楕円体に一致する。つまり、マクローリンの系列からヤコビの系列が分岐(bifurcation)することがわかった。ヤコビの系列に沿って角運動量の増加とともに角速度は、減少していく。この辺の事情はやや不思議な気もするが、自己重力系にとってはよくみられる現象である。この見かけの微分慣性能率(differential moment of inertia)が負となる現象については次のように説明できる。

まず、 $\Delta J$  だけ角運動量を増加させるとすれば、そのときの角速度の増加  $\Delta \Omega$  は、

$$\Delta \Omega = (\Delta J - \Omega \Delta I) / I \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $I$  は慣性能率である。自己重力流体の場合、角運動量の変化によって自らの形状を変えるから、慣性能率  $I$  は、 $\Delta I$  変化する。この  $\Delta I$  が大きければ、式

(3) より  $\Delta \Omega$  は負になる。マクローリン回転楕円体の場合には、その軸比が2くらいになれば、角運動量をもらうことによって、より偏平になり、そのことによる慣性能率の増加  $\Delta I$  が、角運動量の増加  $\Delta J$  を陵駕するようになる。ヤコビ楕円体では、細長くなることによって慣性能率を大きくする。

このように、自己重力流体の角速度に上限が存在していることは、剛体回転という仮定のもとでは、避けようがない性質である。リーマン (Riemann) は、内部運動を導入することで、角速度の上限を取り除くことに成功した。彼は、空間的に渦度一定という仮定を置き、三軸不等の楕円体の厳密解を見つけた。これはリーマン楕円体と呼ばれる。軸対称な解は実質的に、マクローリン回転楕円体と一致する。ただ、どのような角速度を持つ回転系から見るかの違いだけである。逆回転する回転系から見れば、見掛けの  $\Omega$  が大きくなるのは当たり前であって、これだけでは詐欺にあったようなものである。ただ、違いがでてくるのは、非軸対称の三軸不等の楕円体の場合である。軸対称リーマン回転楕円体 (実は、マクローリン回転楕円体) とリーマン楕円体の関係は、マクローリン回転楕円体とヤコビ楕円体の関係と同じく、軸対称の解から、非軸対称の解が分岐してくる。いくつかの渦度に対して、その系列を図3に示した。ここで、渦度  $\zeta$  は角速度  $\Omega$  との相対的な大きさ  $f$  で表すことにする。つまり、

$$f = \zeta / \Omega \quad (4)$$

である。図3の破線で示された系列が、 $f$  一定のリーマン楕円体の系列を示しているが、その傾向は、剛体回転の場合と同じく、角運動量の増加とともに角速度が減少している。ここで  $f = 0$  の場合が、剛体回転の場合に相当している。では、 $f = \infty$  の場合はどうなっているのだろうか。これは、形は止まっているが中の流体はグルグル回っている状態である。このような場合を特に、デデキント (Dedekind) 楕円体と呼ぶ。

いままで述べてきた解は厳密解であるが、その形が楕円体に限られている。それでは、楕円体という仮定を外した場合には、その形状がどのように変化するのだろうか。ここでは、渦度一定という仮定はそのまま採用するが、その形状には自由な形をとっても良いことにして、数値的に求める。

楕円体という仮定を外した場合にどのようにその系列が変化していくかという問題は、剛体回転の場合については我々が初めて調べた。その結果は前回の研究会で報告したのでここではあらましのみ述べる。(図1、および、図2参照。)(a) ヤコビ系列から、啞鈴型の形状を持つ、ダム・ベル (dumb-bell) 系列が分岐して、(b) この啞鈴の腰の部分がいよいよ細くなって、最後には千切れて連星系 (binary) が生まれる。(前回の研究会の集録参照。講究録No.510 268ページ。)

渦度一定の場合には、剛体回転の時と比べてどのように違ってくるのだろうか。

## § 2. 基本的な仮定と方程式

### 2.1. 速度場

まず、運動をふたつに分解する。ひとつは形そのものが回転することによるもの。これは形の回転 (figure rotation, pattern motion) と呼ばれる。力学平衡にあるためには、これはある回転系に乗ってみた場合、剛体的に回転していなければならない。それ以外では、重力が時間的に変動してしまうので平衡ではなくなってしまう。ふたつ目は、その回転系からみた場合の内部の流体の運動 (internal motion) である。渦度一定の流れは、内部運動について適用する。この時の速度場は、

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられるとする。渦度  $\zeta$  は、

$$\zeta = \text{rot } \vec{u} \quad (6)$$

だから、 $z$ -成分のみ残って、その大きさを  $\zeta$  とすれば、

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

となる。連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

と (7) 式から、流れ関数  $\Psi(x, y)$  を定義できて、これは

$$\Delta \Psi(x, y) = -\zeta \quad (9)$$

を満足する。このとき、速度場  $(u, v, w)$  は

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (10)$$

から計算される。この解は級数を使って

$$\Psi = -\zeta \left[ \frac{1}{4}(x^2+y^2) + \sum_{n=0}^{\infty} S_n \operatorname{Re}\{(x+iy)^n\} \right] \quad (11)$$

と表される。ここで、 $S_n$  は後で境界条件を満たすように決められた定数である。この項は  $n=18$  までとった。また、 $\operatorname{Re}$  は実数部 (real part) をとることを意味する。

## 2.2. 重力の計算

つぎは、重力の計算であるが、これは積分形でそのまま求める。つまり、

$$\begin{aligned} \Phi &= -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \\ &= -4G\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta' d\theta' \int_0^\pi d\phi' \sum_{n=0}^{\infty} f_n[r, R(\theta', \phi')] P_n(\cos\gamma) \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_n[r, R(\theta, \phi)] = \begin{cases} \frac{1}{n+3} \frac{R^{n+3}(\theta, \phi)}{r^{n+1}}, & \text{for } R(\theta, \phi) < r \\ -\frac{1}{n-2} \frac{r^n}{R^{n-2}(\theta, \phi)} + r^2 \left( \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n-2} \right), & \text{for } R(\theta, \phi) \geq r \text{ and } n \neq 2 \\ r^5 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{n} \frac{R(\theta, \phi)}{r} \right), & \text{for } R(\theta, \phi) \geq r \text{ and } n=2 \end{cases} \quad (13)$$

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi') \quad (14)$$

ここで  $P_n(\cos \gamma)$  はルジャンドル (Legendre) の多項式である。この項は  $n=18$  までとった。ここで、表面は、

$$r = R(\theta, \phi) \quad (15)$$

で表されるものとした。さらに、平衡解の性質から、流体は  $x$ - $z$  面、及び赤道面について対称であることを仮定している。

### 2.3. 力学平衡の条件

このような流体が力学平衡にあるためには、流体の表面（式15）のあらゆる点で、

$$\Phi - \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + (2\Omega + \zeta)\Psi = C_1 \quad (= \text{const.}) \quad (16)$$

が満たされなければならない。さらに、流体の表面に沿って速度場は平行でなければならないから、

$$\Psi(x, y) \Big|_{\text{at } z=z_0 \text{ on the surface}} = C(z_0) \quad (17)$$

となる。これは、ある高さ  $z = z_0$  の平面と流体の表面との交わりの曲線上で流れ関数の値が一定であることを意味している。

## § 3. 平衡解と結果の解析

### 3.1. 平衡解の求めかた

渦度  $\zeta$  と角速度  $\Omega$  の比  $f$  を与えて平衡解をもとめるのであるが、解を特定するためにはもうひとつのパラメータを与えなければならない。それは、赤道面上の最大半径と極方向の半径の比で与える。このパラメータを何にするかで、解が計算出来たり、また逆に出来なかったりするるので注意が必要である。

得られた結果は、図3に実線で示した。 $f = \pm 0.5$ 、 $\pm 1.0$  について求めた。 $|f| > 1.0$  の場合については数値計算上の困難の為、求めることができなかった。ここで求めた4例はすべて、剛体回転の場合と同じく、啞鈴型平衡形状から連星へと、その形をかえていく。真中のところでくびれてからは、連星系として計算する。これは、各々の流体をそれぞれに独自の座標を張って、単連結の場合と同じように計算するものである。この場合でも、 $f$  と軸比が解を特定するパラメータとなる。

連星系になってからは、 $f$  の値が大きくても求めることが出来て、 $-4.5 < f < -1.0$  および、 $1.0 < f < 5.0$  については、ふたつの流体が接するところまで計算できた。これより大きな（絶対値で） $f$  については計算してみると、ふたつの流体はある所まで近寄れるが接するところまで近寄れない。このことは後で論じる。

### 3.2. 解の性質

求められた解は、図3に示した。濃い実線は啞鈴型の形状を持つ系列を示し、細い実線は連星系になった系列を示す。点線はふたつの流体がちょうど接している場合を示す。図4にはその形状の変化とその時の速度場の様子を示す。

今までは、 $f$  に着目してみたが、実際の回転の大きさを評価するためには、 $f$  と  $\Omega$

をあわせた量でみる必要がある。ここでは、スピンのおおまかな大きさを

$$\Omega_s = \Omega + \zeta/2 = \Omega(1+f/2) \quad (18)$$

で表すことにする。軸対称の場合は、これは正確な表現になっているが、非軸対称の場合には近似的なものである。図5では、図3と違って、これを縦軸にとった。図5から、軸対称なリーマン楕円体は、実質的に一通りしかなく（勿論、これはマクローリン回転楕円体と完全に一致するものであるが、）そこから種々の  $f$  を持ったリーマン楕円体が分岐してくるのがわかる。

渦度  $\zeta$  と角速度  $\Omega$  の比  $f$  が比較的小さい場合は、剛体回転の場合と定性的に同じ結果が得られた。しかし、 $f$  が大きくなった場合には、連星系の場合を除いては、はっきりした結論は得られなかった。連星系の方から連続的に啞鈴型の系列につながっていかないことは前章で述べたが、なぜそうなるのかについてははっきり示していない。次の章ではその理由について述べる。

### 3.3. 連星が近づく最も短い距離

例えば、形が静止系からみて全く回転していないデデキント楕円体の様な場合を考えてみることにする。この楕円体から啞鈴型の系列が分岐できたとして、最終的に分裂して連星系になれるのだろうか。もしそんなことになったら、ふたつの内部運動はあるが回転していない流体が重力に抗して宙に浮かんでいることになる。この場合自分自身の重力に釣りあう力は存在出来ても相手の重力に対抗する力（例えば、遠心力のようなもの）はないので、このふたつの流体はお互いに引き合ってくっついてしまう。従って、必ず回転していなければならない。この回転の大きさはある制限を受ける。

まず、簡単なモデルを作ってその大きさを評価してみる。ふたつの等質量の流体がお互いのまわりを円軌道を描きながら回っているとす。その距離を  $A$ 、全体の質量を  $M$  とする。そのとき、角速度  $\Omega$  は

$$\Omega^2 = GM/A^3 \quad (19)$$

で与えられる。各々の流体はスピンしているとして、その大きさは式(18)で与えられるとする。この流体をマクローリン回転楕円体で近似することを考える。これは、軸対称なリーマン楕円体で各々の流体を表現することと同じである。先に述べたように、マクローリン回転楕円体の角速度には上限がある。（図1を参照。）この上限は、

$$\omega_s^2 = \Omega_s^2 / (4\pi G \rho) = \omega^2 (1+f/2)^2 \leq 0.112 \quad (20)$$

で与えられるから、 $f$  を与えたとき  $\omega$  には

$$\omega^2 \leq 0.112 / (1+f/2)^2 \quad (21)$$

のように上限が存在する。この関係を (19) 式に代入すれば、次のように距離  $A$  に下限が存在する。

$$A \left( \frac{8\pi\rho}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{2}{3\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \geq 1.81 \times (1+f/2)^{\frac{2}{3}} \quad (22)$$

ここで、距離  $A$  は質量  $M/2$  で密度  $\rho$  の流体の球の半径を単位とする長さで規格化されている。この長さが 2 より小さいので、たとえ球だとしても  $f$  が小さい場合にはふたつの流体はくっつくことができる。スピンしている場合にはもっと偏平になるので、球の場合よりはくっつきやすくなる。このようにして得られた、ふたつの流体が接するための条件は、

$$|1+f| \leq (3\pi)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

で、これより  $-8.14 \leq f \leq 4.14$  が得られる。この値は、まあまあ数値計算の答えと一致している。では、 $f$  の値が大きくなった場合にはどうなるのか。実際、 $f = -50$  で計算した場合に得られた最小の  $A$  は、前記の単位で 15.28 である。これは (22) 式から計算した値 (15.06) と良い一致を示している。

これらのことから考えて、 $f$  の値が大きい場合はリーマン楕円体から啞鈴型の平衡解が分岐したとしても、その系列は連星系まで連続的につながることは出来なくて途中でとぎれるか、またはもとの楕円体の形状に近いものになっていくのだろう、と推測できる。

ただし、はっきりとしたイメージを得るためにはそういった系列をきちんと計算する必要がある。これは、今後に残された問題である。

#### § 4. まとめ

ここでは、渦度  $\zeta$  が一定の場合に、自己重力流体がどのような形状をとることができるかについて論じた。渦度  $\zeta$  が 0 の場合は (剛体回転の場合)、ヤコビ楕円体から、啞鈴型 (dumb-bell) の形状が分岐し、さらにその腰の部分が千切れて、最終的に連星系が生まれる。渦度  $\zeta$  と角速度  $\Omega$  の比  $f$  を与えて、解系列を計算した場合、 $f$  が小さい時は定性的に  $f = 0$  (剛体回転) の時と同じであるが、 $f$  が大きい場合には連星系に連続的につながる系列は存在しない。この時、連星系の各々の流体には近づく最小の距離が存在して、 $f$  の値が大きくなれば、その 3 分の 2 乗に比例して大きくなる。リーマン楕円体から分岐する系列については、 $f$  が小さい場合しか求められなかったが、分岐することは多分確実と思われるので、その後の系列がどうなるのかは、今後に残された問題である。



## 参考文献

Chandrasekhar, S., "Ellipsoidal Figures of Equilibrium", (Yale University press, New Haven), 1969. にはいままで述べてきた古典的な話と60年代までのまとめが載っています。

その他については、講究録No.510 p.268の私たちのまとめにある文献を参照して下さい。

## 図の説明

図1. 剛体回転の場合の  $\omega^2 - j$

マクローリン回転楕円体 (Maclaurin Spheroid), ヤコビ三軸不等楕円体 (Jacobi Ellipsoid), 啞鈴型形状 (dumb-bell), 連星系 (binary) と連続的に変化していく。

図2. ヤコビ楕円体、啞鈴型平衡形状、連星系と変化していく様子。剛体回転の場合のもの。

図3. 渦度一定の場合の  $\omega^2 - j^2$

この場合も、 $f = \pm 0.5, \pm 1.0$  のときは、図1の剛体回転の場合と同じく、回転楕円体から連星系まで連続的に変化していく。ただし、連星系で接するところまで近寄れるのは  $-4.5 \leq f \leq 5.0$  の場合だけである。破線は軸対称リーマン楕円体、および、三軸不等楕円体を表す。太い実線は啞鈴型の形状を持つ系列、細い実線は連星系となったものを、各々示す。点線は連星系が接した点を表す。各系列に付属した数は  $f$  の値を示す。

図4. 平衡解の形。  $f = 1.0$  の場合。

一番下の図は速度場を表す。矢印の長さは速度の絶対値に比例している。(a), (b), (c), (d) と連続的に変化していく。

図5. 縦軸を  $\omega^2 (1+f/2)^2$  にかえたもの。図1、図3と同じもの。

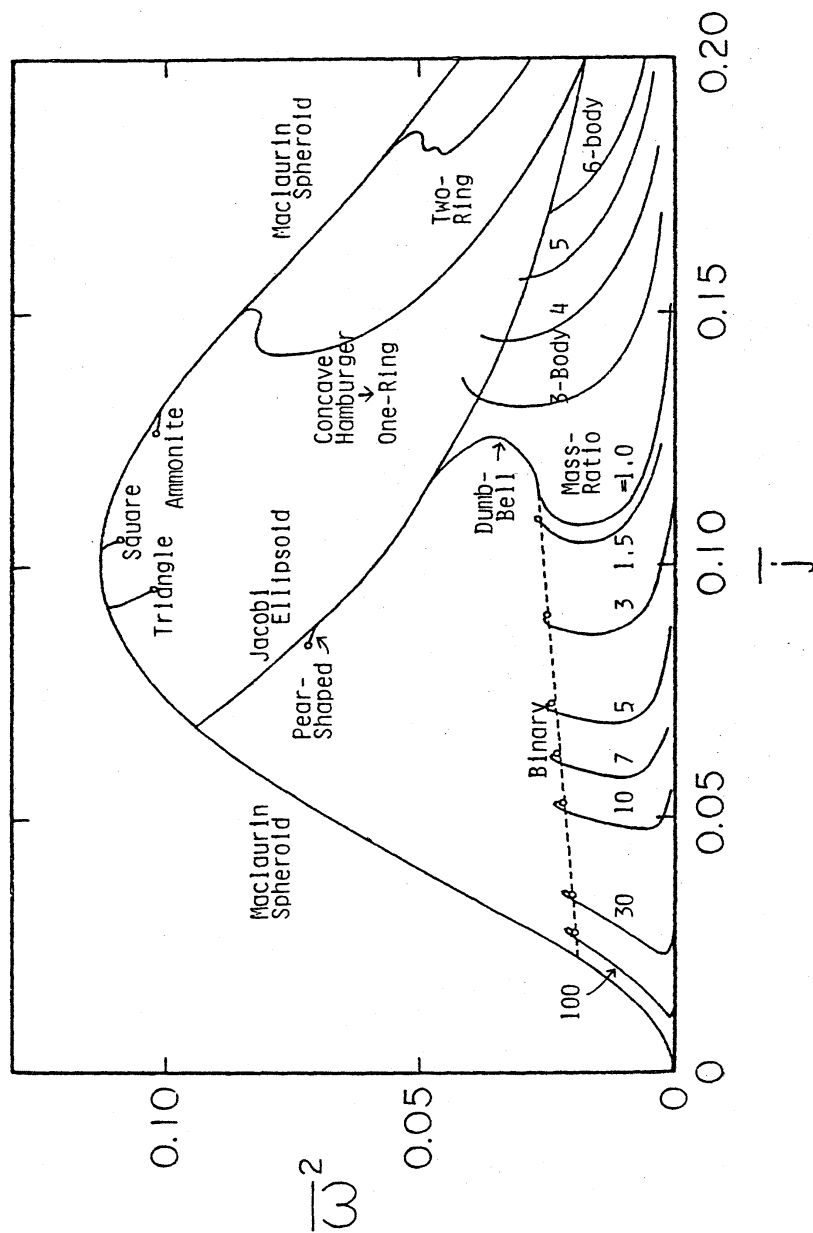


图 1

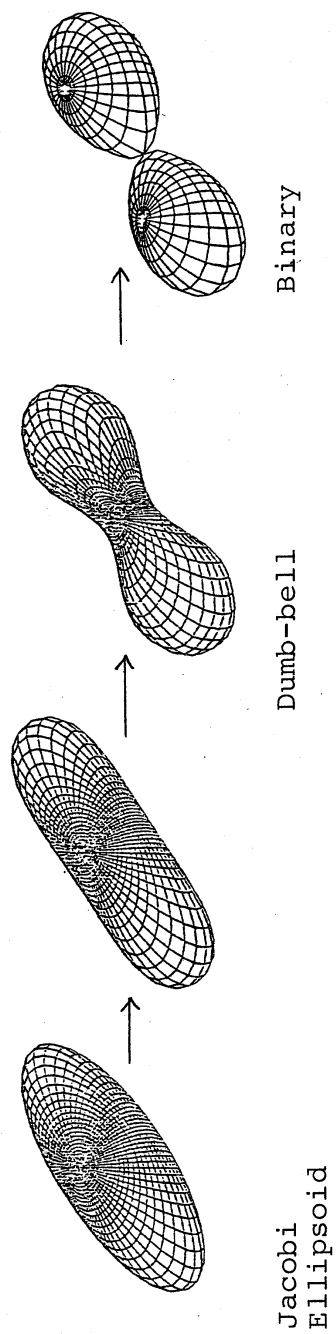


图 2

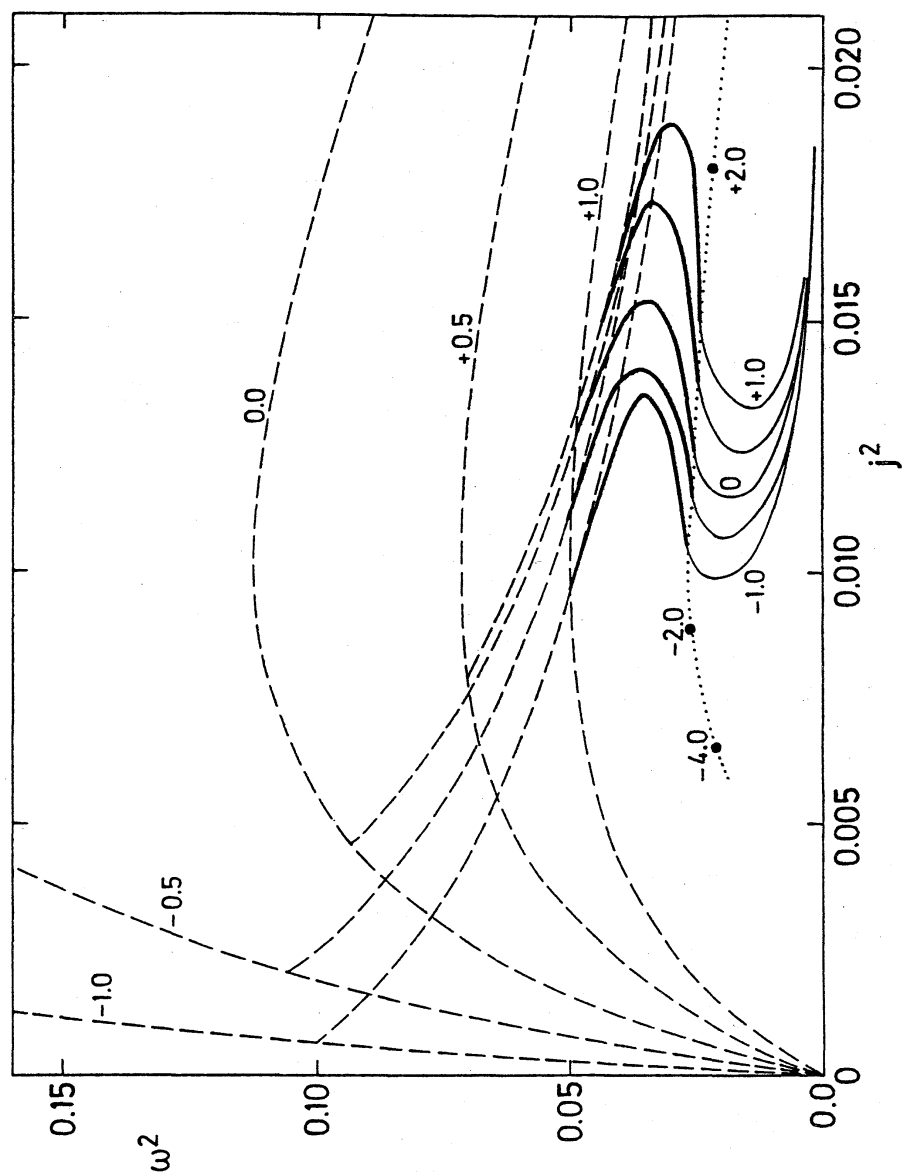
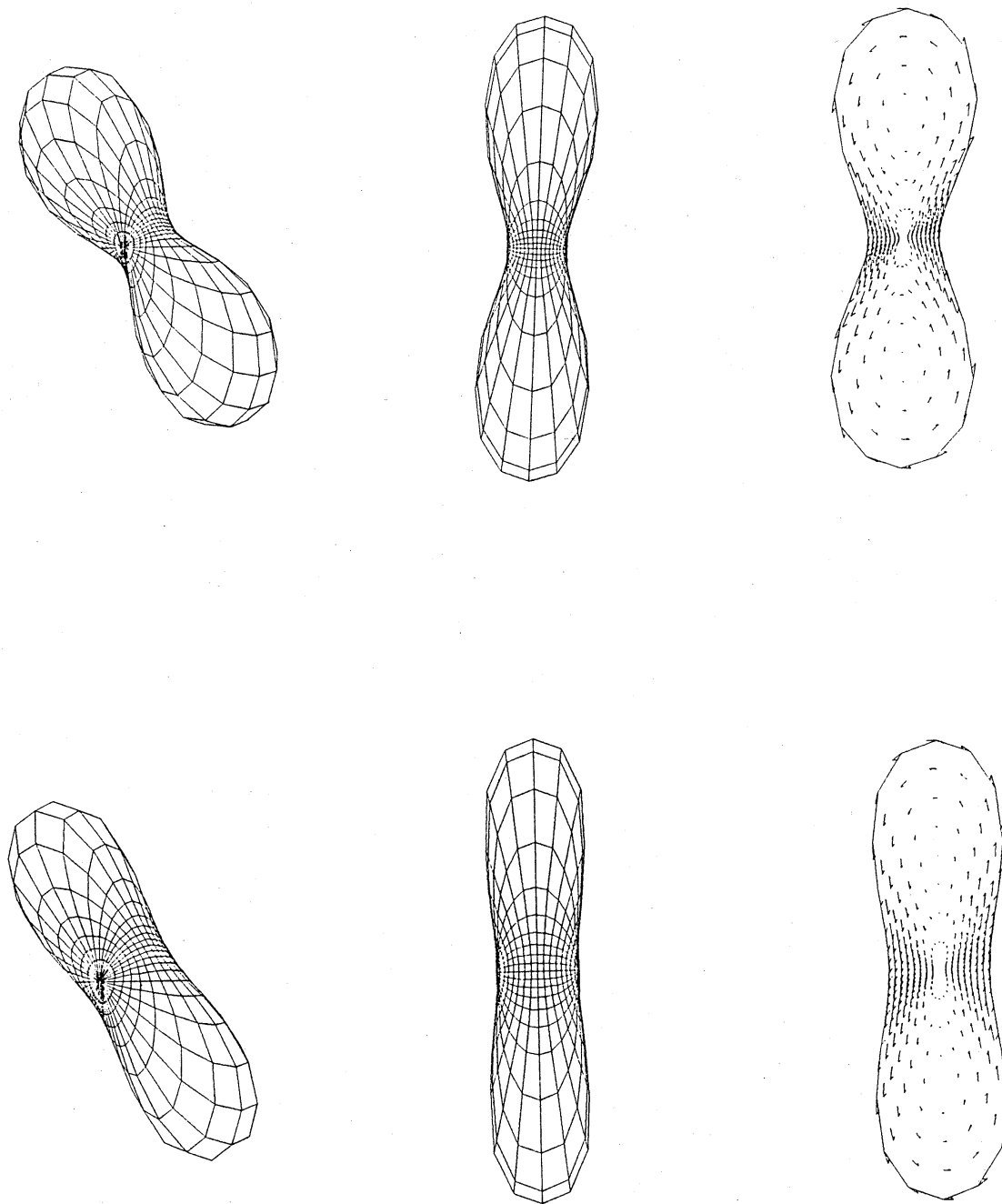


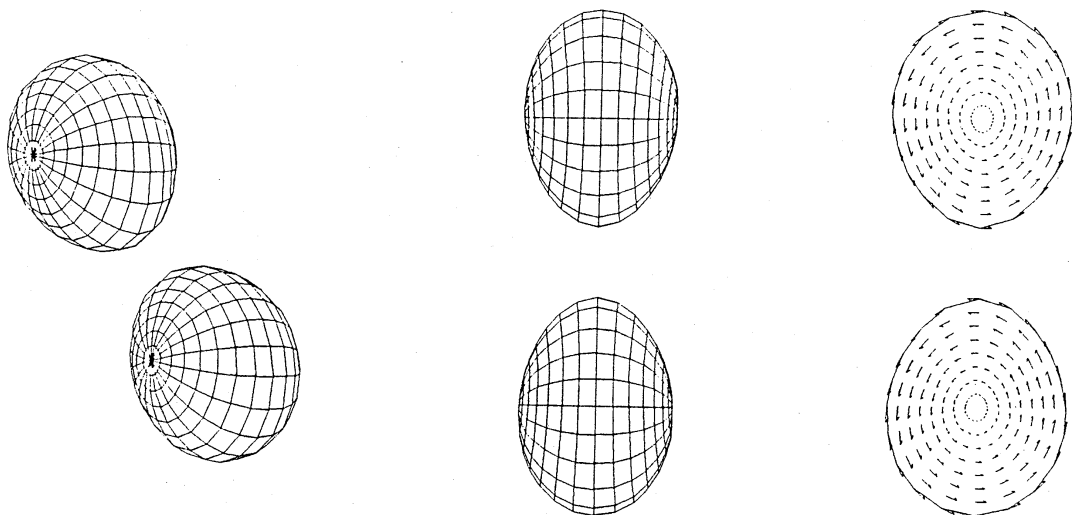
图3



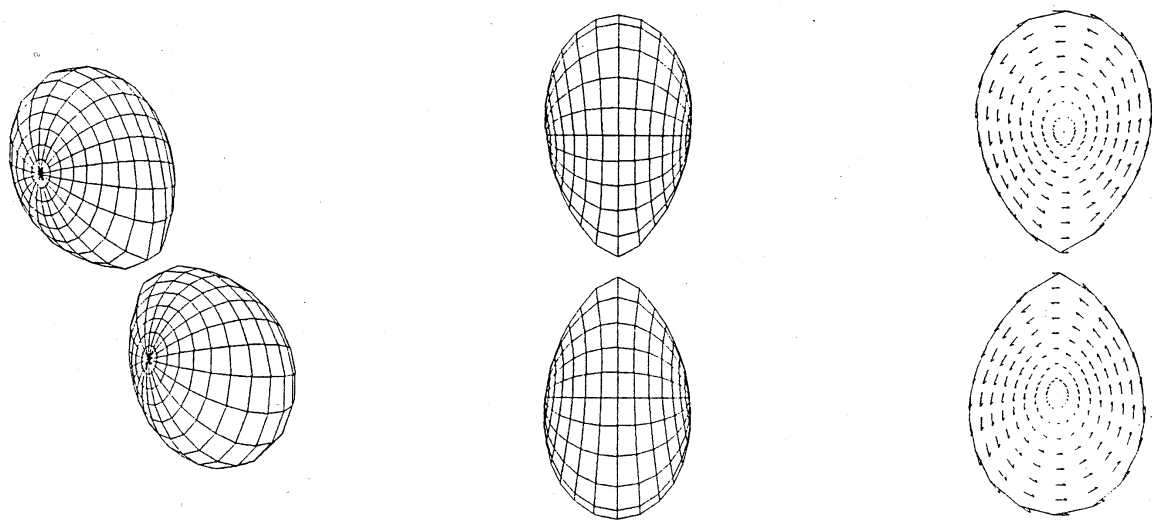
(b)

(a)

图4



(d)



(c)

图4

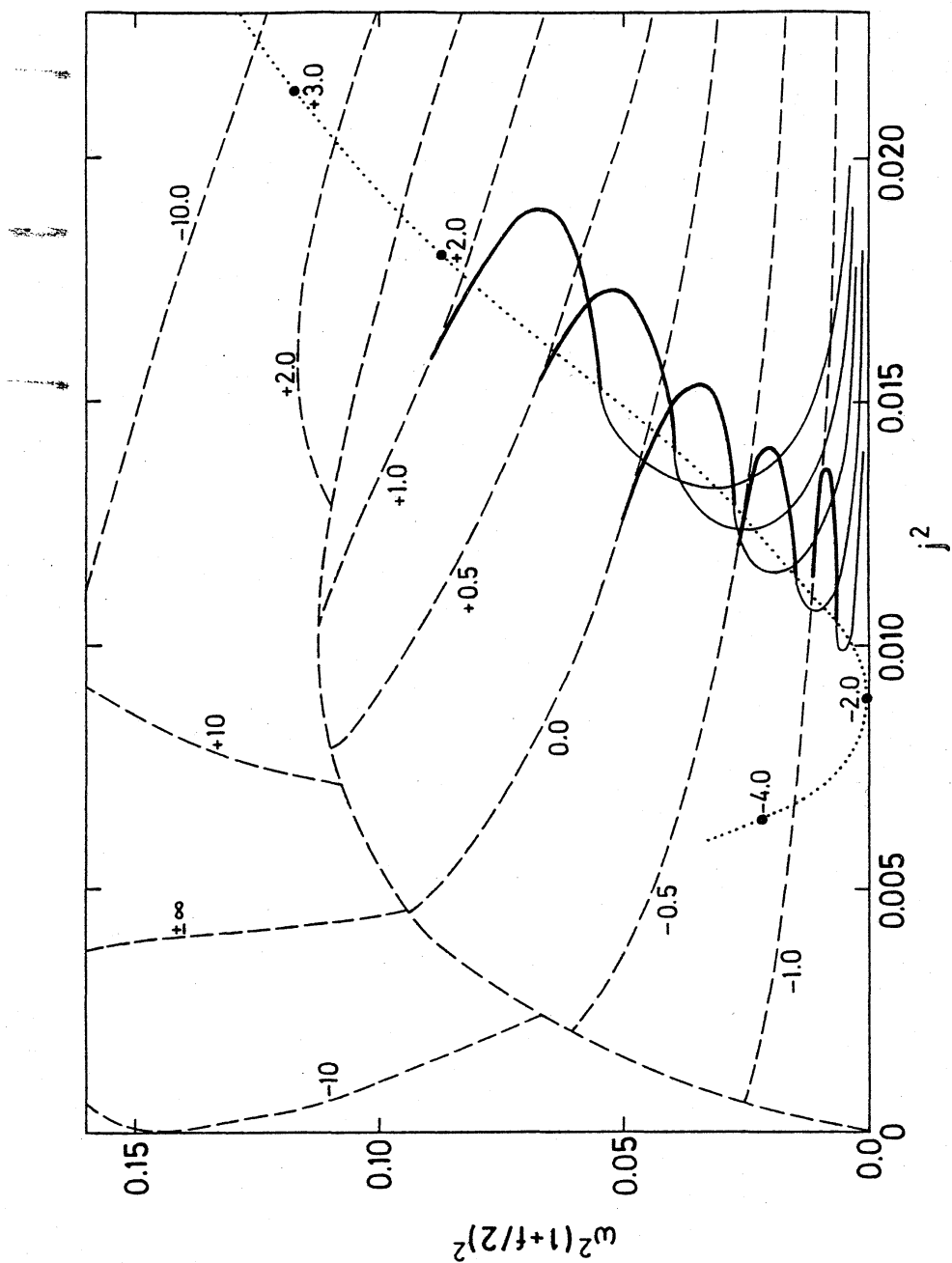


图 5